Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(5x)}{2(1-cos(5x))}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3sin(x)-sin(2x)}{2sin(x)}$ c) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x+\frac{\pi}{4}}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 sin(\frac{1}{x})$

Exercice 2 :

Soit f la fonction tel que $f(x) = sin(2x)$.

1) Etudier f et tracer sa courbe représentative ξ dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2) Déduire la courbe de $g(x) = |sin(2x)|$
3) déterminer la période de g.

Exercice 3 :

Soit $f(x) = 2cos(x) + cos(2x)$. On note ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etudier la parité de f et montrer qu'il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.
2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;\pi]$ l'équation $f(x) = -1$.
4) Construire la partie de ξ dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$
5) calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x^2}$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = \frac{-2sin(x)-1}{1-\sqrt{2}cos(x)}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Etudier le signe de $1-\sqrt{2}cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$.
3) Résoudre dans $[0; 2\pi]$
   $\alpha)\ -2sin(x) - 1 \geq 0$
   $\beta)\ f(x) \leq 0$
4) Calculer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x)$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + cos(x)).sin(x)$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a- Montrer que f est périodique de période 2π.
   b- Etudier la parité de f.
   c- Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $I = [0, \pi]$.
2) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2cos^2(x) + cos(x) - 1$.
3) a- Factoriser la fonction $2t^2 + t - 1$.
   b- On déduire une factorisation de $f'(x)$.
   c- Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
4) Déterminer sur l'intervalle $[0, \pi]$, les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
5) Ecrire l'equation de la tangente T à C_f au point O.
6) Construire C_f sur $[0, \pi]$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos^2(2x) - 4sin(2x)$. et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a- Montrer que π est une période de f .

b- Montrer que la droite Δ : $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour C_f.

c- Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

2) a- Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a $f\,'(x) = -4cos(2x)(sin(2x) + 2)$.

b- Dresser le tableau de variations de f sur I .,

c- Tracer C_f pour x $\in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = cos^2(2x) - 4|sin(2x)|$.

a- Montrer $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) = g(x)$.

b- Montrer que $\frac{\pi}{2}$ est une période de de g.

c- Tracer alors la courbe de C_g de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a- Montrer que la droite Δ : $x = -\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f.

b- Montrer que le point $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de C_f.

2) Soit Γ la courbe représentative de la restriction de f sur l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

a- Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b- Résoudre dans $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = 1$.

c- Tracer la courbe Γ.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par $g(x) = 1 + |f(x) - 1|$.

a- Tracer la courbe C_g de g dans le même repère que Γ.

b- Déterminer, graphiquement, les solutions dans $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ de l'inéquation $g(x) \geq 2$.

Exercice 8 :

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2cos(2x - \frac{\pi}{3})$ et $g(x) = 2sin(2x - \frac{\pi}{6})$.

On désigne par ζ *et* ζ'les graphiques respectifs de f et g dans un $r.o.n$ $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a- Montrer que la droite Δ: $x = \frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie de la courbe ζ.

b- Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$.

2) a- Dresser le tableau de variation de la restriction de f à l'intervalle I.

b- Tracer la courbe représentative de la fonction f restreinte à $[-\pi, \pi]$.

3) a- Montrer que ζ' est l'image de ζ par la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{\pi}{6}\,\vec{\imath}$

b- Déterminer les points d'intersection des courbes ζ et ζ'.

c- Tracer la courbe de g restreinte à $[-\pi, \pi]$.

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |cos(2x)| + \sqrt{3}\,|sin(2x)|$.

a- Montrer que l'on peut restreindre l'étude de H à l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

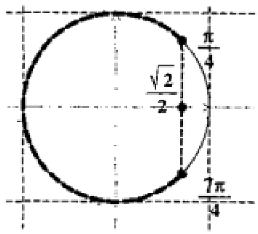
b- Exprimer $h(x)$ sans valeur absolue pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c- Tracer à partir des courbes ζ et ζ', la courbe de h restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Correction exercices 2-3-4

Exercice n°5 : 1) $D_f=\left\{x\in[0,2\pi]/1-\sqrt{2}\cos x\neq 0\right\}$. $1-\sqrt{2}\cos x\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos x\neq\cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $x\neq-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ donc $\boxed{D_f=[0,2\pi]\setminus\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\}}$.



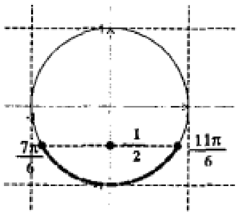
2) $1-\sqrt{2}\cos x\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos x\leq\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$1-\sqrt{2}\cos x$		-	0	+	0	-	

3) $-2\sin x-1\geq 0\Leftrightarrow \sin x\leq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x\leq\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

et par suite $\begin{cases}\sin x\leq\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ \text{et } x\in[0,2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$



donc $\boxed{S_{[0,2\pi]}=\left[\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]}$. $f(x)\leq 0\Leftrightarrow\frac{-2\sin x-1}{1-\sqrt{2}\cos x}\leq 0$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$-2\sin x-1$		-		-	0	+		+	0	-	
$1-\sqrt{2}\cos x$		-	0	+		+	0	-		-	
$f(x)$		+	‖	-	0	+	‖	-	0	-	

$S_{[0,2\pi]}=\left]\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left]\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{6}\right]$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\overbrace{-2\sin x-1}^{\to-\sqrt{2}-1}}{\underbrace{1-\sqrt{2}\cos x}_{0^-}}=-\infty$

Exercice N°6: 1) $f(x)=\sin 2x$, f est définie et continue sur IR ; f est périodique et de période $T=\pi$; f est une fonction impaire ; il suffit d'étudier f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

On désigne par Γ la courbe représentative de la

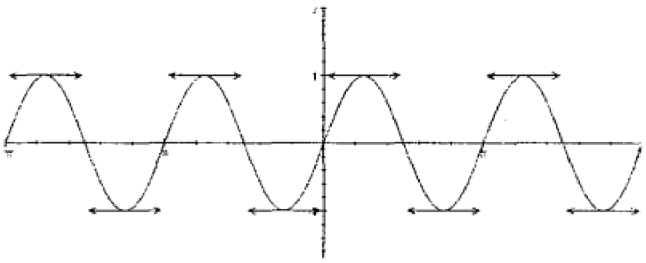
Soit $\zeta_0=\Gamma\cup\Gamma'$ la courbe représentative de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	2	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

restriction de la fonction f à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et par (Γ') la symétrique de Γ par rapport à l'origine du repère.

Posons ζ_K : l'image de ζ_O par la translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Donc ζ est la réunion de toutes les courbes ζ_K lorsque k varie dans $\mathbb{Z}$ .f est dérivable sur IR et $f'(x) = 2\cos 2x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



2) $g(x) = |\sin 2x|$. La courbe représentative de g est la réunion de la partie de ζ située au dessus de l'axe des abscisses et de la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie de ζ située au-dessous de l'axe des abscisses.

3) g est périodique et de période $T = \frac{\pi}{2}$

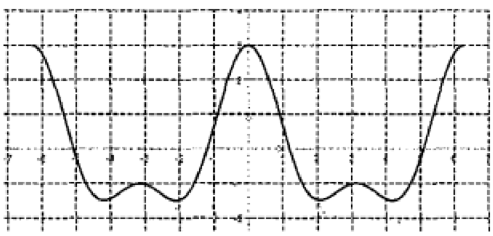
Exercice n°7 : 1) $D_f = \mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(-x) \in \mathbb{R}$: f(-x) = 2cos(-x) + cos(-2x) = 2cos(x) + cos(2x) = f(x). Donc f est paire. Pour tout réel x, $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$,

$f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi)) = 2\cos(x) + \cos(2x + 4\pi) = 2\cos(x) + \cos(2x) = f(x)$ donc f est périodique et de période 2π . D'où il suffit d'étudier sur $[-\pi, \pi]$, or f est paire donc $(O, \vec{i})$ est un axe de symétrie de ζ_f . Ainsi il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.

2) f est dérivable sur $[0, \pi]$. $f'(x)$=-2sinx-2sin2x=-2(sinx+sin2x)=-2(sinx+2cosx.sinx) = -2 sinx (1+2cosx).

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } 1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pi \end{cases} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \pi \end{cases} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	3	↘	-1,5	↗	-1



3) f(x) = -1 sig 2cosx + cos2x = -1
sig 2cosx+ $2\cos^2(x)$ -1=-1 sig 2cosx(1+cosx) = 0

. sig

cosx = 0 ou cosx = -1 sig $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f(x)$	3	0,5	-1	-1,5	-1

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ car f est dérivable en 0 Donc

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 0$

Correction exercice 5:

xercice n3:

$f(x) = (1+\cos x)\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\frac{5}{10}$

1) a°/ mq f est periodique de periode 2π

f définie sur $\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$; $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$$f(x+2\pi) = (1+\cos(x+2\pi))\sin(x+2\pi)$$
$$= (1+\cos(x))\sin x$$
$$= f(x)$$

donc f est periodique de periode 2π.

b°/ Etudier la parité de f.

f définie sur $\mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$

sig $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = (1+\cos(-x))\sin(-x)$$
$$= (1+\cos(x)) \times (-\sin(x))$$
$$= -f(x)$$

donc f est impaire.

c°/ f étant periodique de période 2π, donc il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π par exemple $[-\pi, \pi]$, le reste de $\mathcal{C}$ s'obtiendra par la translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

f étant impaire, $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine O.

il suffit de l'étudier f sur $[0, \pi]$, la symétrie par rapport à O nous donnera $\mathcal{C}$ sur $[-\pi, \pi]$.

5/10

2/

la fonction $x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

la fonction $x \longmapsto 1+\cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = -\sin x(\sin x) + \cos(1+\cos x)$$
$$= \cos x + \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}$$
$$= \cos x + \cos^2 x - (1-\cos^2)$$
$$f'(x) = \cos x + 2\cos^2 x - 1$$

3/ a) Factoriser $2t^2+t-1$

$$2t^2+t-1 = 2(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

b) En déduire une factorisation de $f'(x)$.

$$f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$
$$f'(x) = 2(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$$

c) Dresser le tableau de variation de f.

$f'(x) = 0 \iff \cos x + 1 = 0$ ou $\cos x - \frac{1}{2} = 0$

$\iff \cos x = -1$ | $\cos x = \frac{1}{2}$

$\iff x = \pi$ | $x = \frac{\pi}{3}$

$\cos x - \frac{1}{2} > 0 \iff \cos x > \cos\frac{\pi}{3}$

$\iff x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

$\frac{7}{10}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos x + 1$		$+$		$+$	0
$\cos x - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

4] Determination sur $[0, \pi]$, les abscisses des points d'intersection C_f et l'axe d'abscisses.

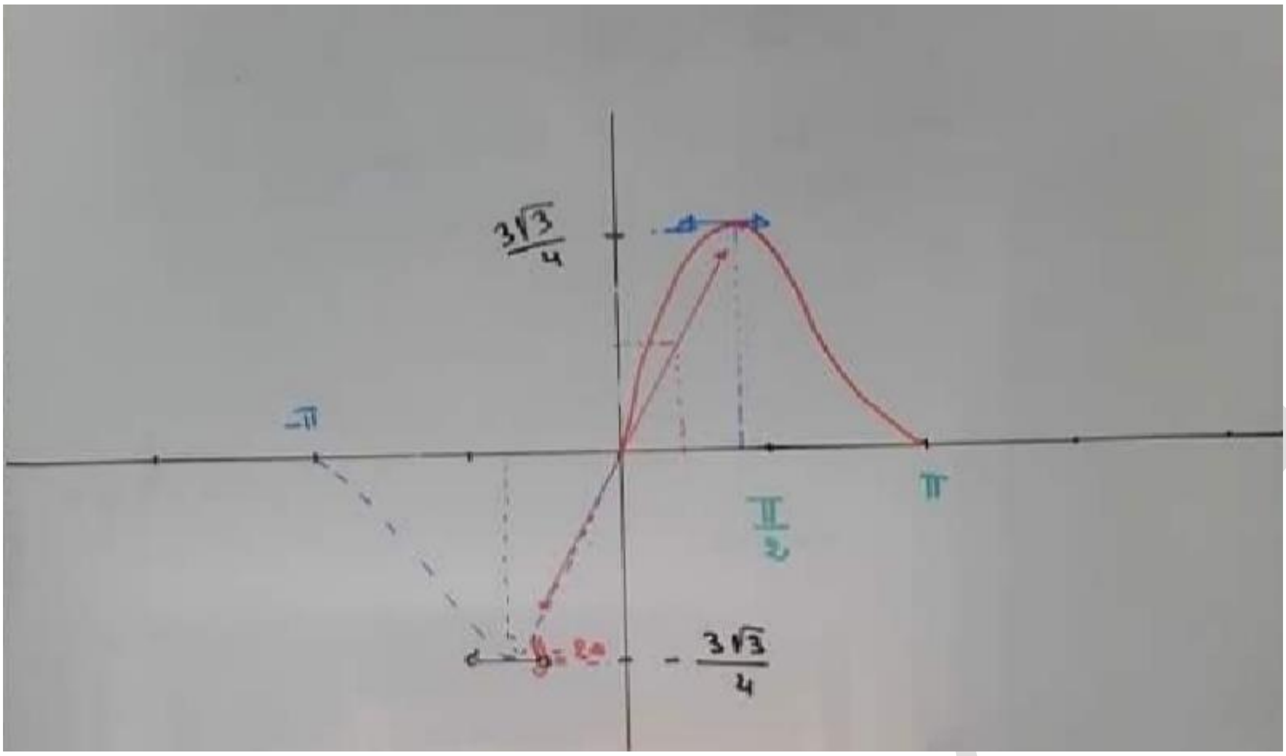
$f(x) = 0 \iff \sin x = 0$ ou $1 + \cos x = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = \pi$

donc f coupe l'axe des abscisse en deux pts d'absci 0 et π.

5] $T : y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

$\boxed{T_0 : y = 2x}$



3√3/4
-π
π
π/2
y = 2x
- 3√3/4

1.(a) $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(2\times\left(\frac{-\pi}{2}\right)-x\right)=f(-\pi-x)=2\cos\left(\frac{-\pi}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{-x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\underset{\text{cos est paire}}{=}f(x).$

Alors la droite Δ d'équation $x=-\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f de f.

2. (a) $f(2x_A-x)+f(x)=f(\pi-x)+f(x)=2\cos\left(\pi-\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)+f(x)=-f(x)+f(x)=0.$

Par conséquent, $f(2x_A-x)+f(x)=2.y_A$ donc le point $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de C_f.

2. (a) $f'(x)=-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. Or, $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\leq\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$.

Tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	$-$
$f(x)$	2	$\searrow$	0

(b) Soit $x\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$f(x)=1\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\ Or\ x\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\ \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in[-\pi;\pi].$$

Alors comme $\forall y\in[-\pi;\pi], \cos(y)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{\pi}{3}$ *ou bien* $y=-\frac{\pi}{3}$, on aura :

$$\forall x\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right], \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}\ ou\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\ ou\ bien\ x=-\frac{7\pi}{6}.$$

$$S_{\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]}=\left\{-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$$

(c) Voir fin de l'exo.

Explication : On trace tout d'abord la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Puis par symétrie par rapport à $A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ (centre de symétrie), on achève le traçage de Γ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $car\,\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}*\frac{3\pi}{2}$. Enfin par symétrie par rapport à l'axe de symétrie $\Delta: x=\frac{\pi}{2}$, on achève le traçage de Γ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ car $-\frac{\pi}{2}$ est le milieu du segment : $\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

3. (a) D'après le graphique de f :

$$\forall x\in\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right], f(x)-1\geq 0 \;\; et \;\; \forall x\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{-7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right], f(x)-1\leq 0.$$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) \;;\; si\; x\in\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right] \\ 2-f(x) \;;\; si\; x\in\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{-7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

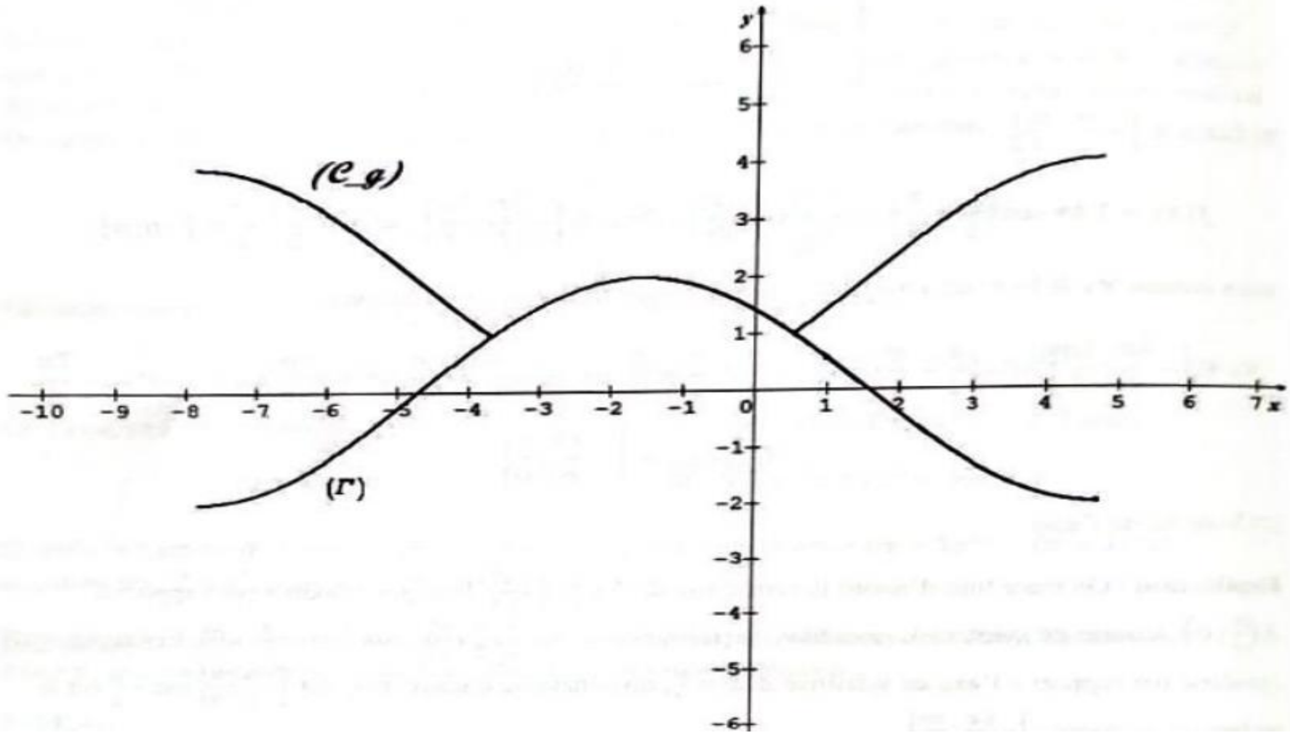
$$\Rightarrow C_g=\begin{cases} C_f \;\;;\;\; sur\;\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \\ t_{2\vec{J}}oS_{(O,\vec{\imath})}(C_f) \;\;;\;\; sur\;\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{-7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

(b) Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe C_g qui sont situés au dessus de la droite $D: y=2$. Résolvons tout d'abord l'équation $g(x)=2$ dans l'intervalle de réels $\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Soit en effet x un réel de l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$:

$$g(x)=2\Leftrightarrow|f(x)-1|=1\Leftrightarrow f(x)=0 \;ou\; f(x)=1\Leftrightarrow \dots\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{2} \;ou\; x=-\frac{\pi}{2} \;ou\; x=\frac{\pi}{2}.$$

Les solutions de l'inéquation demandée sont alors données par l'ensemble :

$$S_{\left[-\frac{5\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]}=\left[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right].$$



Correction exercice 8 :

1. (a) $f\left(2\times\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=2\cos\left[2\times\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\underset{\text{Cos est paire}}{=}f(x)$ d'où la droite $\Delta: x=\frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie de (C_f).

(b) f est périodique de période π car : $f(x+\pi)=2\cos\left(2x+2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=f(x)$ d'où il suffit d'étudier f sur un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ or comme la droite $\Delta: x=\frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie de C_f et que $\frac{\pi}{6}$ est le milieu du segment $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ (le lecteur vérifiera facilement ce fait) , alors on peut restreindre l'étude de f à $I=\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]$.

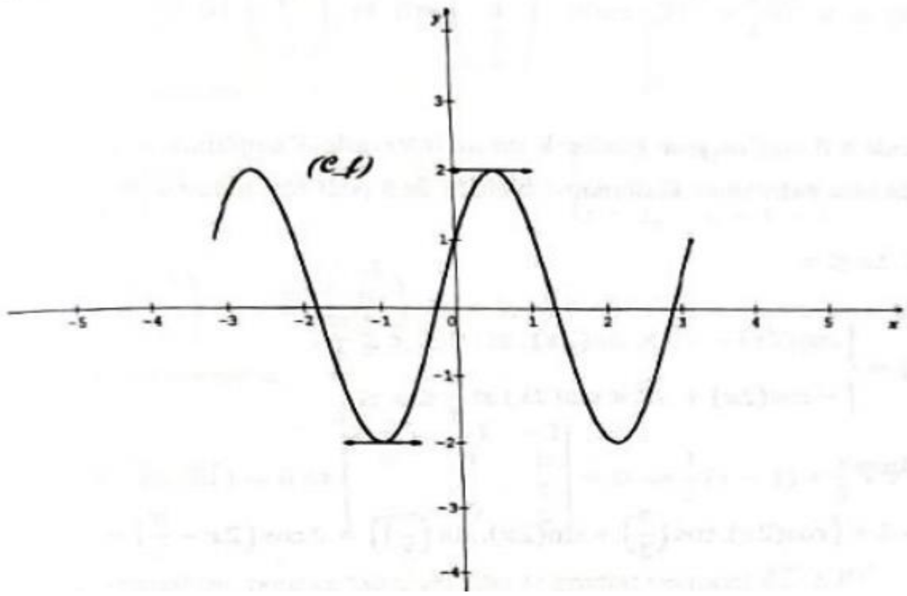
2. (a) $\forall x\in I, f'(x)=-4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Si $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$ alors $-\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 0$ et par suite dans ce cas : $f'(x)\ge 0$. Noter bien que : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}$ *ou* $x=\frac{\pi}{6}$.

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-2 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2.$$

Tableau de variation de f :

x	$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	-2	↗	2

(b) Courbe représentative de f sur $[-\pi;\pi]$.



3. (a) On a : $\forall y \in \mathbb{R}, \cos\left(y-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \sin(y)$. Alors :

$$g(x) = 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left[\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = 2\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left[2.\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]$$

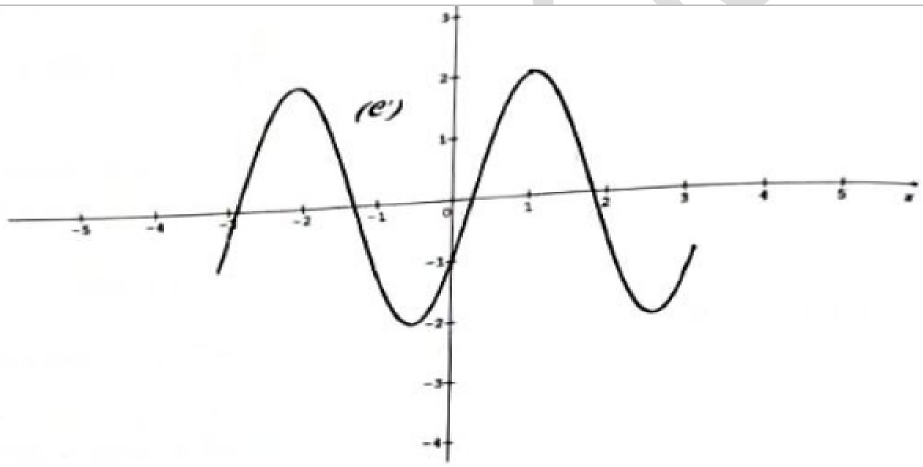
Par suite $g(x) = f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ d'où la courbe $(\mathcal{C}')$ de g est l'image de $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur donné par : $\vec{u} = \frac{\pi}{6}\vec{\imath}$.

(b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{3} \equiv 2x-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ $\left(exclus\ car\ \frac{2\pi}{3} \neq \frac{\pi}{3}(2\pi)\right)$ $ou\ bien\ 2x-\frac{\pi}{3} \equiv -\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)[2\pi] \Leftrightarrow 4x \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} = x_k\ (k \in \mathbb{Z})$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(x_k) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^k \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-1)^k \times \sqrt{3}.$$

$$(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{C}') = \left\{M_k\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}; (-1)^k \times \sqrt{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(c) On a représenté ci-dessous la courbe représentative de g sur $[-\pi;\pi]$:



4. (a) h est périodique de période π d'où l'on peut étudier h sur un intervalle d'amplitude π, soit l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, or h est de plus paire donc le domaine d'étude de h peut être réduit à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Si $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $alors\ 0 \le 2x \le \pi$.

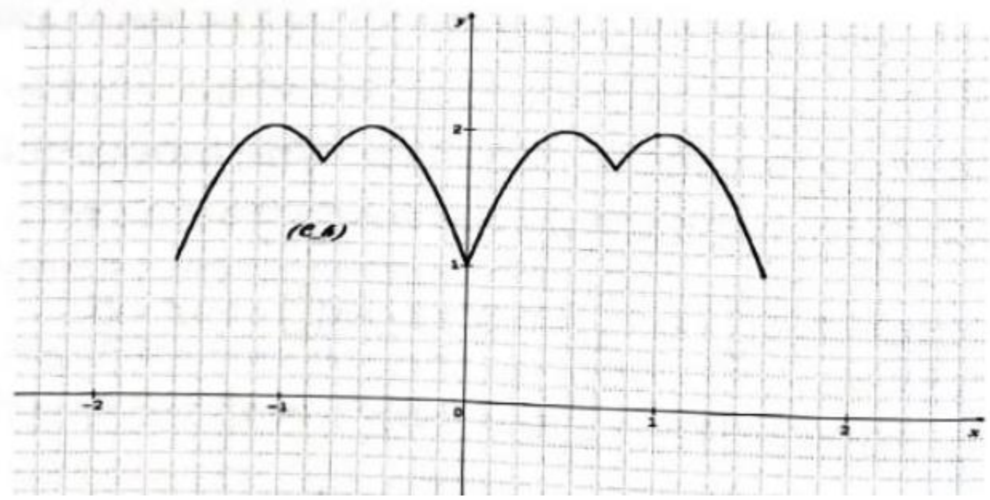
$$h(x) = \begin{cases} \cos(2x)+\sqrt{3}\times\sin(2x) & si\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}. \\ -\cos(2x)+\sqrt{3}\times\sin(2x) & si \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

(c) Par une transformation polaire :

$$\cos(2x)+\sqrt{3}\times\sin(2x) = 2\times\left(\cos(2x).\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(2x).\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = f(x).$$

$$-\cos(2x)+\sqrt{3}\times\sin(2x) = 2\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = g(x).$$

Alors : (i) Sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, C_h coïncide avec $(\mathcal{C}) = (C_f)$. (ii) Sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, (C_h) coïncide avec $(\mathcal{C}') = (C_g)$. (iii) on achève le traçage de (C_h) sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.


y
2
1
0
-2
-1
1
2
x
(C_f)